

Diamètre transfini

Alexandre Abouda

Soit K une partie compacte et infinie de $\mathbb{C}$. Pour $n \geq 2$, on définit le diamètre d'ordre n de K par

$$d_n(K) = \sup_{z_1, \dots, z_n \in K} \prod_{i < j} |z_j - z_i|^{\frac{2}{n(n-1)}}.$$

Lorsque $n = 2$, on retrouve le diamètre de K . Comme K est compact, la borne supérieure dans cette définition est atteinte en des points $z_1, \dots, z_n \in K$. On appelle *configuration de Fekete* un tel ensemble $\{z_1, \dots, z_n\}$.

Comme K est un ensemble infini, l'application $\|\cdot\|_K : P \in \mathbb{C}[X] \mapsto \sup_{z \in K} |P(z)|$ définit une norme sur K . Posons, pour $n \geq 1$, $\rho_n(K) = \inf \{\|P\|_K ; P \in \mathbb{C}[X] \text{ unitaire de degré } n\}^{\frac{1}{n}}$.

Proposition 1. *Les suites $(\rho_n(K))_{n \geq 1}$ et $(d_n(K))_{n \geq 1}$ convergent vers la même limite $\inf_{n \geq 1} \rho_n(K)$.*

On procède en plusieurs étapes.

Lemme 1. *La suite $(d_n(K))_{n \geq 2}$ est décroissante.*

Démonstration du lemme 1. Soit $n \geq 2$. Fixons une configuration de Fekete $\{z_1, \dots, z_{n+1}\} \in K^{n+1}$. Pour $k = 1, \dots, n+1$, on pose

$$\pi_k = \prod_{\substack{i < j \\ k \notin \{i, j\}}} |z_j - z_i|.$$

Alors $\pi_k \leq d_n(K)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Mais comme $\prod_{k=1}^{n+1} \pi_k = \prod_{i < j} |z_j - z_i|^{n-1} = d_{n+1}(K)^{\frac{n(n-1)(n+1)}{2}}$ puisque

chaque couple (i, j) apparaît dans tous sauf deux facteurs du produit $\prod_{k=1}^{n+1} \pi_k$, on obtient

$$d_{n+1}(K)^{\frac{n(n-1)(n+1)}{2}} \leq d_n(K)^{\frac{n(n-1)(n+1)}{2}},$$

d'où le résultat. □

Notons que comme $(d_n(K))_{n \geq 2}$ est positive, elle converge d'après le lemme 1. On note $d_\infty(K)$ sa limite.

Lemme 2. *La suite $(\rho_n(K))_{n \geq 1}$ converge vers $\inf_{n \geq 1} \rho_n(K)$.*

Démonstration du lemme 2. Pour $n \geq 1$, $\rho_n(K)^n = d(X^n, \mathbb{C}[X]_{\leq n-1})$ est la distance de X^n au sous-espace vectoriel de dimension finie (donc fermé) $\mathbb{C}[X]_{\leq n-1}$ de $\mathbb{C}[X]_{\leq n}$. Il existe donc un polynôme unitaire T_n de degré n de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\|T_n\|_K = \rho_n(K)^n$.

Soient $m, n \geq 1$. Le polynôme $T_m T_n$ est un polynôme unitaire à coefficients complexes et de degré $m+n$, donc $\rho_{m+n}(K)^{m+n} \leq \|T_m T_n\|_K$. Mais comme $\|T_m T_n\|_K \leq \|T_m\|_K \|T_n\|_K$, on a

$$\rho_{m+n}(K)^{m+n} \leq \rho_m(K)^m \rho_n(K)^n.$$

Le lemme sous-additif appliqué à la suite $(\log \rho_n(K)^n)_n$ impose que $(\rho_n(K))_n$ tend vers $\inf_{n \geq 1} \rho_n(K)$. □

Revenons à la proposition. Pour $n \geq 1$, prenons une configuration de Fekete $\{z_1, \dots, z_n\}$. Considérons le polynôme

$$P = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & \dots & z_n^n \\ 1 & X & \dots & X^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_j - z_i) \times \prod_{i=1}^n (X - z_i) \quad (1)$$

Par l'équation (1), $d_n(K)^{\frac{n(n-1)}{2}} \rho_n(K)^n \leq \|P\|_K \leq d_{n+1}(K)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, et donc

$$\rho_n(K) \leq d_n(K) \quad (2)$$

d'après le lemme 1.

Comme le déterminant est une application multilinéaire alternée,

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & z_n & \dots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & T_1(z_1) & \dots & T_{n-1}(z_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & T_1(z_n) & \dots & T_{n-1}(z_n) \end{vmatrix} \quad (3)$$

D'après l'inégalité de Hadamard sur les déterminants combinée à l'équation (3), $d_n(K)^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq \prod_{k=0}^{n-1} \sqrt{n} \|T_k\|_K^2$ et donc, en utilisant (2)

$$\rho_n(K) \leq d_n(K) \leq n^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{k=1}^{n-1} \rho_k(K)^k \right)^{\frac{2}{n(n-1)}} \quad (4)$$

Le lemme de Césaro montre que $\left(\prod_{k=1}^{n-1} \rho_k(K)^k \right)^{\frac{2}{n(n-1)}}$ tend vers $\inf_{n \in \mathbb{N}} \rho_n(K)$. En prenant la limite dans l'encadrement (4), on obtient alors $d_\infty(K) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \rho_n(K)$.

Remarque 1. Il y a unicité d'un tel polynôme T_n . On appelle T_n le n -ième polynôme de Tchebychev du compact K . Lorsque $K = [-2, 2]$, T_n est l'unique polynôme tel que $T_n(X + \frac{1}{X}) = X^n + \frac{1}{X^n}$ (ou de manière équivalente $T_n(2 \cos \theta) = 2 \cos(n\theta)$).

Remarque 2. La limite commune $d_\infty(K)$ est appelée diamètre transfini du compact K . Ce nombre est aussi appelé capacité du compact K .